Conceptualización para la estimación de la potencia reactiva, incluyendo el efecto de los armónicos de tensión y corriente

ENRIQUE CIRO QUISPE OQUEÑA*
JAÍR AGUADO QUINTERO**

Resumen

En este trabajo se presenta un enfoque nuevo para conceptualizar la potencia eléctrica en condiciones no sinusoidales. También se presenta una metodología para calcular a partir de instrumentos de medida digitales el valor de los componentes de potencia eléctrica, incluyendo el efecto de los armónicos de tensión y corriente.

Introducción

En la actualidad el incremento del uso de convertidores de potencia (AC/AC, AC/DC, etc.), dispositivos electrónicos, accionamientos eléctricos de velocidad variable, fuentes ininterrumpidas de potencia (UPS), etc., contribuyen a una excesiva distorsión de las formas de onda de tensión y corriente.

Es conocido que la medición de la potencia reactiva es esencial para el control de tensión en sistemas de distribución. Asimismo, la utilización de condensadores, en condiciones sinusoidales, mejora el factor de potencia y permite controlar la tensión. Sin embargo, en presencia de distorsión armónica añadir un condensador puede reducir el factor de potencia y crear serios problemas.

Lo anterior ha forjado la necesidad de contar con un método seguro para la medición de los componentes de la potencia en presencia de distorsión armónica. La pregunta quizá más importante a contestar para aclarar este tema es en qué forma se pueden definir apropiadamente los componentes de la potencia en situaciones no sinusoidales.

Aquí se presenta un enfoque nuevo para conceptualizar la potencia eléctrica en condiciones no sinusoidales. También, una metodología para calcular a partir

* Profesor de la Unidad Académica de Ingeniería Eléctrica y Electrónica CUAO. Ingeniero Electricista, M.Sc.E.E. Investigador, Grupo de Investigación en Energías, CUAO.
** Investigador, Grupo de Investigación en Energías. CUAO. Ingeniero Electricista CUAO.

de instrumentos de medida digitales el valor de la potencia reactiva. Este trabajo fue realizado en el marco de un proyecto de investigación por el Grupo de Investigación en Energías GIEN[6], de la Corporación Universitaria Autónoma de Occidente, Cali - Colombia.

Definición de potencia eléctrica en condiciones sinusoidales

La potencia eléctrica instantánea se define como el producto del voltaje y la corriente instantánea, así:

$$P(t) = v(t).i(t) \qquad (1)$$

En condiciones sinusoidales, la onda de tensión y corriente se puede representar por una onda sinusoidal pura a una frecuencia única, entonces definimos la tensión y la corriente instantánea como:

$$v(t) = \sqrt{2}V_{ef}\ \mathrm{sen}(\omega t) \qquad (2)$$

$$i(t) = \sqrt{2}\,I_{ef}\ \mathrm{sen}(\omega t) - \theta) \qquad (3)$$

La potencia instantánea vendrá dada por la relación:

$$P(t) = 2V_{ef}\ I_{ef}\ \mathrm{sen}\ (\omega t)\ \ \mathrm{sen}\ (\omega t - \theta)$$

Desarrollando esta expresión, se llega a:

$$\begin{aligned} P(t) &= 2V_{ef} I_{ef} \cos\theta\, \mathrm{sen}^2\, \omega t \\ &- 2V_{ef} I_{ef}\ \mathrm{sen}\theta\ \mathrm{sen}\,\omega t \cos\,\omega t \end{aligned} \qquad (4)$$

Reemplazando las siguientes identidades trigonométricas:

$$sen^2\ \omega t = \frac{1 - \cos 2\ \omega t}{2}\ ;\ \mathrm{sen}\ \omega t \cos\ \omega t = \frac{\mathrm{sen}\ 2\omega t}{2}$$

En la ecuación (4), se llega a:

$$\begin{aligned} P(t) &= V_{ef} I_{ef} \cos\ \theta - V_{ef} I_{ef}\ \cos\ \theta \cos 2\omega t \\ &- V_{ef} I_{ef}\ \mathrm{sen}\theta\, \mathrm{sen}\ 2\omega t \end{aligned} \qquad (5)$$

El primer término de la ecuación (5), $P = V_{ef} I_{ef} \cos\,\theta$, se conoce como potencia activa o potencia dc.

El segundo término, $V_{ef} I_{ef}\ \cos\theta\ \cos 2\omega t$, lo denominaremos potencia real rotatoria, siguiendo a Makram[7]. Esta potencia varía a una frecuencia del doble de la fundamental y tiene un valor máximo igual a la potencia activa P. Se observa que el valor promedio de este término en un período es cero.

El tercer término, $V_{ef} I_{ef}\ \mathrm{sen}\ \theta\ \mathrm{sen}\ 2\omega t$, lo denominaremos potencia en cuadratura pues está desfasada 90° de la potencia activa rotatoria. Esta potencia también varía al doble de la frecuencia fundamental y su valor promedio es cero. El valor máximo de esta potencia se define como Potencia Reactiva Q, es decir: $Q = V_{ef} I_{ef}\ \mathrm{sen}\ \theta$.

Con estos criterios, la ecuación (5) se puede reescribir:

$$P(t) = P - P \cos 2\omega t - Q\ \mathrm{sen}\ 2\omega t \qquad (6)$$

De esta ecuación se puede ver que la potencia activa rotatoria y la potencia en cuadratura se puede representar por fasores desfasados 90° que giran a una frecuencia de 2ω.

Usando la identidad trigonométrica:

$$A \cos\,\alpha + B\ \mathrm{sen}\ \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(\alpha - \tan^{-1} \frac{B}{A}\right)$$

la ecuación (6) se transforma en:

$$P(t) = P - \sqrt{P^2 + Q^2} \cos(2\ \omega t - \theta)$$

Al definir

$$P = V_{ef} I_{ef} \cos\theta \qquad (7)$$

$$Q = V_{ef} I_{ef}\, \mathrm{sen}\theta \qquad (8)$$

se puede llegar a la siguiente expresión:

$$P^2 + Q^2 = (V_{ef} I_{ef})^2 = S^2 \qquad (9)$$

Donde, *S* se define como potencia aparente.

Las ecuaciones (7), (8) y (9) son muy usadas en los estudios de sistemas de potencia, y a partir de éstas el factor de potencia (FP) es definido como:

$$FP = \frac{P}{S} = \frac{V_{ef} I_{ef}\ \cos\ \theta}{V_{ef} I_{ef}} = \cos\ \theta \qquad (10)$$

$$FP = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Además:

$$P = \sqrt{S^2 - Q^2}$$

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2}$$

$$P = S \cos\theta = V_{ef} I_{ef} \cos\theta$$

$$Q = S\ \mathrm{sen}\ \theta = V_{ef} I_{ef}\ \mathrm{sen}\ \theta$$

De las ecuaciones anteriores se puede construir el triángulo de potencias, usado para relacionar la potencia activa aparente y el factor de potencia.

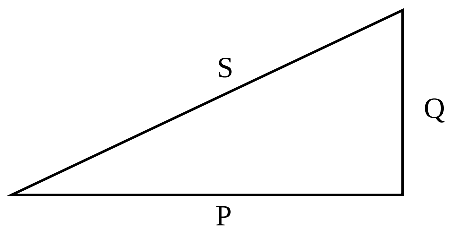


Figura 1. Triángulo de potencias

Definición de potencia eléctrica en condiciones no sinusoidales

Se han realizado muchos esfuerzos para definir la potencia eléctrica en condiciones no sinusoidales. Uno de los mayores problemas que han surgido en este intento es la definición de la potencia reactiva. En 1927, Budeanu[2] definió la potencia reactiva (Q_B) en condiciones no-sinusoidales, en términos de los valores rms de los armónicos de corriente y voltajes, definición que ha sido usada muy extensamente desde entonces. Allí Budeanu introdujo el concepto de potencia de distorsión (D_B). Esta definición de Q_B está basada en la superposición de la potencia reactiva suministrada por cada armónico, matemáticamente:

$$Q_B = \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \operatorname{sen} \varnothing_n \qquad (11)$$

$$D_B = \sqrt{S^2 - P^2 - Q_B^{\,2}} \qquad (12)$$

Sin embargo, la definición de Budeanu y otras definiciones de las cantidades de la potencia han fallado al describir su interpretación física y su relación con las propiedades eléctricas de los componentes de la potencia eléctrica. Al respecto Czarnecki[3] muestra por qué es errónea la concepción propuesta por Budeanu.

Han pasado más de 50 años desde que presentó el problema de la medición de la potencia reactiva y actualmente se han desarrollado varias metodologías para este fin, sin embargo aún no se ha llegado a un consenso entre los investigadores en la definición de la potencia reactiva y su significado físico en condiciones no sinusoidales. Una revisión de las definiciones existentes y de las razones por las cuales estos métodos fallaron en dar un significado físico a la potencia reactiva en condiciones no sinusoidales fue presentado por Emanuel[4] y por Zamora[10].

Con el objetivo de formular las cantidades que caracterizan la potencia eléctrica para todas las frecuencias se partirá de la definición básica de potencia instantánea y se seguirá la metodología propuesta por Makram[7]. Como punto de partida consideraremos que las ondas de tensión y corriente de forma no-sinusoidal se pueden expresar usando la serie de Fourier, de la siguiente forma:

$$v(t) = \sum_{m=1}^{M} \sqrt{2}\, V_m \cos\,(m\omega t + \alpha_m) \qquad (13)$$

$$I(t) = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{2}\, i_n \cos\,(n\omega t + \alpha_n + \theta_n) \qquad (14)$$

donde:

m = orden del armónico de onda de tensión.

n = orden del armónico de onda de corriente.

α_m = desfase de la tensión de orden *m* respecto al sistema de referencia.

α_n = desfase de la tensión de orden *m* respecto al sistema de referencia.

θ_n = desfase entre la onda de tensión y la onda de corriente.

Reemplazando (13) y (14) en (1) obtenemos:

$$p(t) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} 2V_m I_n \cos(m\omega t + \alpha_m) \cos(n\omega t + \alpha_n + \theta_n) \qquad (15)$$

desarrollando la suma de cosenos del armónico de orden n

$$p(t) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} 2V_m I_n \cos(m\omega t + \alpha_m) \cos(n\omega t + \alpha_n) \cos\theta_n - \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} 2V_m I_n \cos(m\omega t + \alpha_m) \operatorname{sen}(n\omega t + \alpha_n) \operatorname{sen}\theta_n \qquad (16)$$

La ecuación (16) puede ser mejor expresada si consideramos el caso de que m = n y cuando m ≠ n, entonces la expresión toma la forma:

$$p(t) = \sum_{m=1}^{M} 2V_m I_m \cos^2 (m\omega t + \alpha_m) \cos \theta_m$$

$$-\sum_{m=1}^{M} 2V_m I_m \operatorname{sen}\theta_m \cos(m\omega t + \alpha_m) \operatorname{sen} (m\omega t + \alpha_m)$$

$$+ \sum_{m \neq n} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} 2V_m I_n \cos(m\omega t + \alpha_m) \cos(n\omega t + \alpha_n) \cos\theta_n$$

$$- \sum_{m \neq n} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} 2V_m I_n \cos(m\omega t + \alpha_m) \operatorname{sen}(n\, \omega t + \alpha_n) \operatorname{sen}\theta_n$$

Esta expresión puede ser simplificada si se reemplazan en ella las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad ; \quad \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2}$$

$$\cos \alpha \cos ß = \frac{[\cos(\alpha + ß) + \cos(\alpha - ß)]}{2}$$

$$\cos \alpha \operatorname{sen} ß = \frac{[\operatorname{sen}(\alpha + ß) - \operatorname{sen}(\alpha - ß)]}{2}$$

Obteniéndose:

$$p(t) = \sum_{m=1}^{M} V_m I_m \cos \theta_m +$$

$$\sum_{m=1}^{M} V_m I_m \cos\theta_m \cos 2(m\omega t + \alpha_m)$$

$$- \sum_{m=1}^{M} V_m I_m \operatorname{sen} \theta_m \operatorname{sen} 2(m\omega t + \alpha_m)$$

$$+\sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} V_m I_n \cos\theta_n \{\cos[(m + n)\omega t + \alpha_m + \alpha_n] +$$

$$\cos[(m - n)\omega t + \alpha_m - \alpha_n]\}$$

$$-\sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} V_m I_n \operatorname{sen}\theta_n \{\operatorname{sen}[(m + n)\, \omega t + \alpha_m + \alpha_n] -$$

$$\operatorname{sen}[(m - n)\omega t + \alpha_m - \alpha_n]\} \qquad (17)$$

La ecuación (17) indica que la potencia eléctrica instantánea puede ser separada en cuatro componentes.

a) Componente de potencia activa:

$$P_{dc} = \sum_{m=1}^{M} V_m I_m \cos\theta_m \qquad (18)$$

b) Componente de potencia real rotatoria:

Esta potencia tendrá una frecuencia que será múltiplo par de la frecuencia fundamental. Esto ocurrirá, en la ecuación (19), para cualquier orden del armónico m y también cuando los términos *(m+n)* y *(m-n)* sean números pares, y por lo tanto la combinación de armónicos de tensión y corriente debe ser, *m* y *n* par o *m* y *n* impar.

$$P_r(t) = \sum_{m=1}^{M} V_m I_m \cos\theta_m \cos 2(m\omega t + \alpha_m) +$$

$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} V_m I_n \cos\theta_n \{\cos[(m+n)\omega t + \alpha_m + \alpha_n] +$$

$$\cos[(m - n)\omega t + \alpha_m - \alpha_n]\} \qquad (19)$$

c) Componente de potencia en cuadratura:

Esta potencia tendrá una frecuencia que será múltiplo par de la frecuencia fundamental. Esto ocurrirá en la ecuación (20), para cualquier orden del armónico m y también cuando los términos *(m+n)* y *(m-n)* sean números pares, es decir se debe cumplir que, *m* y *n* par o *m* y *n* impar.

$$q_r(t) = -\sum_{m=1}^{M} V_m I_m \operatorname{sen}\theta_m \operatorname{sen} 2(m\omega t + \alpha_m)$$

$$-\sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} V_m I_n \operatorname{sen}\theta_n \{\operatorname{sen}[(m + n)\omega t + \alpha_m + \alpha_n] -$$

$$\operatorname{sen} [(m - n)\omega t + \alpha_m - \alpha_n]\} \qquad (20)$$

d) Componente de potencia de distorsión:

Esta potencia tendrá una frecuencia que será múltiplo impar de la frecuencia fundamental. Esto ocurrirá en la ecuación (21), cuando los términos *(m+n)* y *(m-n)* sean números impares. Es decir, *m* par y *n* impar o *m* impar y *n* par.

$$d(t) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} V_m I_n \cos\theta_n \{\cos[(m+n)\omega t + \alpha_m + \alpha_n] +$$

$$\cos[(m-n)\,\omega t + \alpha_m - \alpha_n]\}$$

$$- \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} V_m I_n \,\mathrm{sen}\theta_n \{\mathrm{sen}[(m+n)\,\omega t + \alpha_m + \alpha_n] -$$

$$\mathrm{sen}[(m-n)\,\omega t + \alpha_m - \alpha_n]\} \qquad (21)$$

Metodología para la estimación de la potencia reactiva en condiciones no-sinusoidales

La fórmula más usada para la potencia reactiva cuando esta incluye el efecto de los armónicos, es la de Budeanu[2] que se define como:

$$Q = \sum_{n=1}^{N} V_n I_n \,\mathrm{sen}\theta_n \qquad (22)$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la potencia activa. Sin embargo, la potencia activa debido a los diferentes armónicos, ecuación (18), puede ser sumada aritméticamente porque sus componentes, para cada armónico, representan valores promedios o valores DC.

La potencia en cuadratura, ecuación (20), a una determinada frecuencia representa una cantidad fasorial rotando al doble de la frecuencia dada. Por eso, la potencia en cuadratura debido a 60 Hz es una cantidad fasorial girando a 120 ciclos /s . Así, la potencia en cuadratura debido al armónico h, de tensión y corriente, es también una cantidad fasorial que rota a 120 h ciclos /s. Por lo tanto la magnitud de estos fasores no puede ser sumada aritméticamente para obtener la potencia reactiva total. Lo anterior implica que existe un error conceptual en la ecuación de Budeanu[2], pues está sumando fasores de potencia que están a diferentes frecuencias.

Muchos de los nuevos medidores de estado sólido incluyen el cálculo de un término referido como potencia reactiva. Este término es calculado como el valor promedio del producto de la corriente muestreada y del voltaje muestreado desfasado. Esto puede ser expresado así:

$$Q' = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} i\,(t)\, v\,(t - \tau)\, dt \qquad (23)$$

El valor de τ es tomado como $^1/_4$ del ciclo de 60 HZ. La expresión de Q' puede ser definida matemáticamente como:

$$Q' = \sum_{h} I_h V_h \cos(\theta_h - h\,\frac{\pi}{2}) \qquad (24)$$

donde h es el orden del armónico.

Esta expresión no satisface ninguna de las definiciones de potencia reactiva. Para mostrar cómo el término Q' puede ser usado para calcular la potencia activa o reactiva, consideremos un ejemplo. Analicemos formas de onda de voltaje y corriente que incluyan la fundamental y los armónicos segundo y tercero. Así la onda de tensión se puede expresar:

$$v(t) = V_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + V_2 \cos(2\omega t + \alpha_2) + V_3 \cos(3\omega t + \alpha_3) \qquad (25)$$

y la de corriente como:

$$i(t) = I_1 \cos(\omega t + \alpha_1 + \theta_1) + I_2 \cos(2\omega t + \alpha_2 + \theta_2) + I_3 \cos(3\omega t + \alpha_3 + \theta_3) \qquad (26)$$

Remplazando el valor de Q' será equivalente a:

$$Q' = V_1 I_1 \,\mathrm{sen}\theta_1 - V_2 I_2 \cos\theta_2 - V_3 I_3 \,\mathrm{sen}\theta_3 \qquad (27)$$

El término de la ecuación (27) no representa ninguna forma de potencia cuando la forma de onda está distorsionada.

Como los consumos de potencia reactiva que impliquen un FP por debajo de 0.9 son penalizados, es esencial que la potencia reactiva sea medida por métodos razonablemente exactos. Lo anterior muestra la necesidad e importancia de obtener un método de medición confiable para determinar la potencia reactiva en presencia de armónicos.

Una metodología para calcular los componentes de la potencia eléctrica en condiciones no-sinusoidales es la siguiente: Primero es necesario monitorear digitalmente las señales de tensión y corriente y aplicar a estas un algoritmo de FFT para calcular las amplitudes de cada armónico de tensión y de corriente. En segundo lugar, a partir de las amplitudes de los armónicos calculadas y aplicando las ecuaciones (18), (19), (20) y (21), calcular los componentes de la potencia. El diagrama de flujo del algoritmo propuesto para el cálculo se muestra en la Figura 2.

El método presentado está basado en el análisis en el dominio de la frecuencia y considera armónicos pares e impares de voltaje y corriente. Las ecuaciones

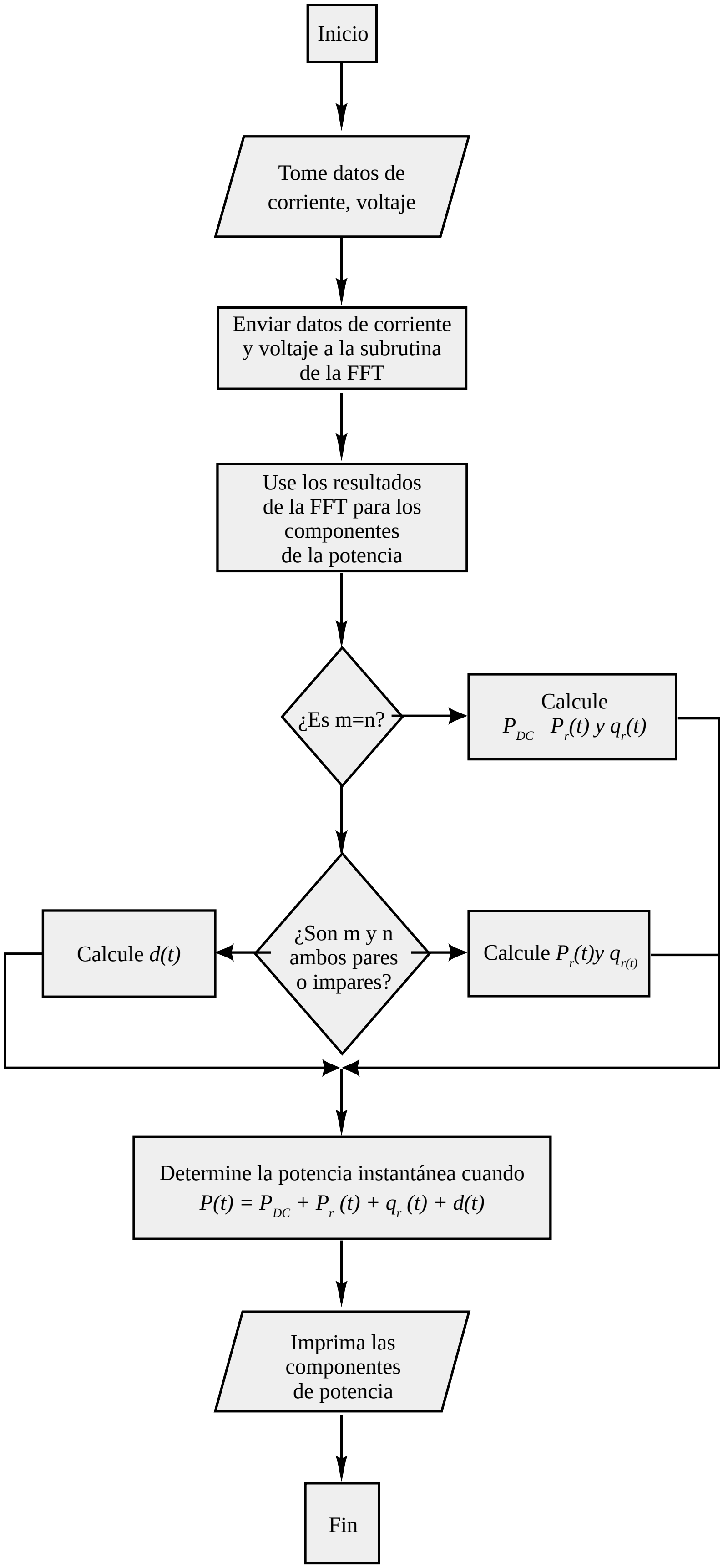


Figura 2. Diagrama de flujo del algoritmo para el cálculo del componente de la potencia eléctrica, incluyendo el efecto de los armónicos.

matemáticas se desarrollan para la potencia real rotativa, la potencia en cuadratura y la potencia residual. En este momento se está desarrollando el algoritmo para calcular cada componente de la potencia a una determinada frecuencia.

Conclusiones

En condiciones sinusoidales se puede considerar que la potencia instántanea tiene tres componentes:

- La potencia activa, definida como el valor medio en un período de la potencia instantánea, y es este valor el que mide el vatímetro. Físicamente la potencia activa es la potencia que es transferida de la fuente a la carga y es consumida por ésta.
- La potencia real rotatoria es un componente que varía a una frecuencia del doble de la fundamental y tiene un valor máximo igual a la potencia activa. El valor promedio de este término es cero.
- La potencia en cuadratura es el componente que varía al doble de la frecuencia fundamental y su valor promedio es cero. El valor máximo de esta potencia se define como potencia reactiva Q.
- El FP se define como la relación entre la potencia activa consumida por la carga y la máxima potencia aparente que se puede obtener con los valores efectivos de tensión e intensidad. En estas condiciones FP=cosθ.

En condiciones no-sinusoidales se pueden considerar los siguientes componentes:

- La potencia activa se define como la suma aritmética de los productos $V_m I_m \cos\theta$ para todos los valores de m. Es decir, se extiende la definición de potencia activa dada para el componente fundamental a cada armónico de tensión y de corriente del mismo orden. Como el producto es un valor de potencia DC, puede ser sumado aritméticamente.
- La potencia real rotatoria es un componente que varía de acuerdo con una función cosenoidal de frecuencia múltiplo par de la frecuencia fundamental, ecua-

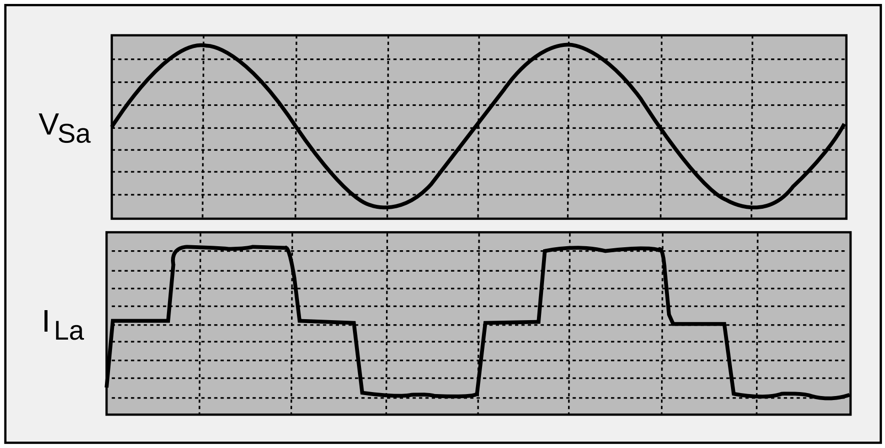
ción (19). Esto ocurrirá para cualquier orden del armónico m y cuando los términos *(m+n)* y *(m-n)* sean números pares.

- La potencia en cuadratura es el componente que varía de acuerdo con una función senoidal de frecuencia múltiplo par de la frecuencia fundamental, ecuación (24). Esto ocurrirá para cualquier orden del armónico m y cuando los términos *(m+n)* y *(m-n)* sean números pares. Este término está en cuadratura con la potencia real rotatoria.

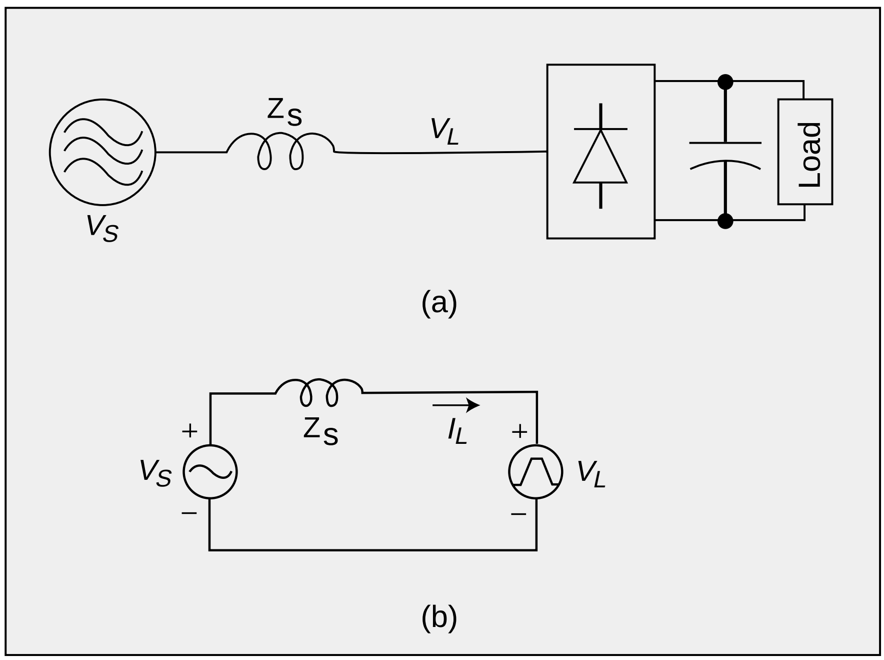
La potencia de distorsión es un componente que solo aparece en presencia de armónicos. Dicho componente está compuesto de dos funciones, una sinusoidal y otra cosenoidal de frecuencia múltiplo impar de la frecuencia fundamental, ecuación (21). Esto ocurrirá para cualquier orden del armónico m y cuando los términos *(m+n)* y *(m-n)* sean números impares.

El FP en condiciones no sinusoidales también se define como la relación entre la potencia activa consumida por la carga y la máxima potencia aparente que se puede obtener con los valores efectivos de tensión e intensidad. En estas condiciones FP=P/S no es igual a cosθ. Para determinar la potencia aparente se debe calcular el valor eficaz de todos los componentes de la potencia, es decir, la potencia real rotatoria, la potencia en cuadratura y la potencia de distorsión.

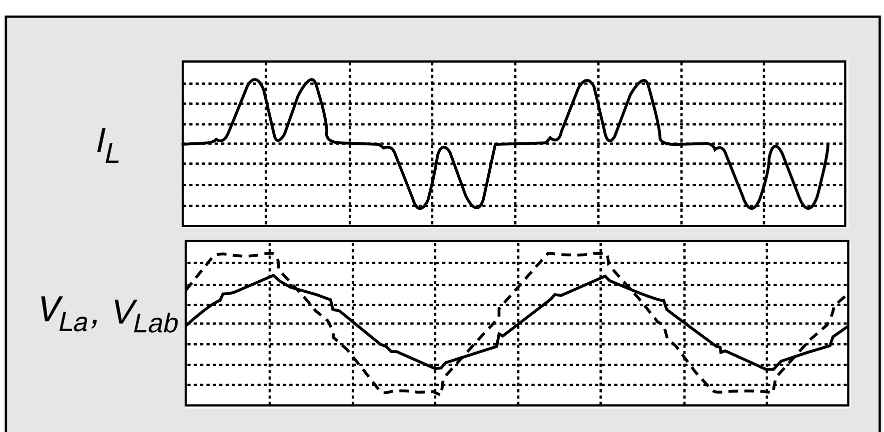
La importancia que tiene en la estructura de costos de la industria la magnitud de la potencia reactiva hace necesario e importante obtener un método de estimación confiable para determinar la potencia reactiva en presencia de armónicos. La conceptualización teórica y la metodología expuesta aquí, constituye un aporte en este sentido. ✿



Formas de ondas típicas de voltaje (Vsa) y de corriente (Iia) de un rectificador a tiristores



Fuente de voltaje. a) Diodo rectificador; b) Circuito equivalente por face de un diodo rectificador.



Formas de ondas típicas de corriente (I_L) y voltaje línea neutro (V_{La}) y línea a línea (V_{Lab}) de un rectificador a diodos.

Bibliografía

1. Arrillaga J. y Eguiluz. Armónicos en sistemas de potencia. Editado por la Universidad de Cantabria y Electra de Viesgo. España, 1995.

2. Budeanu C.I. Puissances reactives et fictives. Instytut Romain de I´Energie, Bucharest, Romania, 1927.

3. Czarnecki L. What is wrong with the Budeanu concept of reactive and distortion power and why it should be abandoned. IEEE. Transactions on instrumentation and measurement. Vol. IM-36, No. 3. Septiembre, 1987.

4. Emanuel A. Powers in nonsinusoidal situations. A review of definitions and physical meanings. IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 5, No.3. July, 1990.

5. Grady M. y Gilleskie R. Harmonics and How they relate to power factor. Proc. of the EPRI Power Quality Issues & Opportunities Conference (PQA´93), San Diego, CA, USA. November, 1993.

6. Grupo de Investigación en Energías-CUAO. Conceptualización y medición de la potencia reactiva y el factor de potencia, considerando el efecto de los armónicos de tensión y de corriente. Informe Final. Biblioteca CUAO. Junio, 2000.

7. Makram, Haines R. y Girgis A. Effect of harmonic distortion in reactive power measurement. IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 28, No. 4. July/August, 1992.

8. Oppenheim A., Willsky A. y Young I.. Señales y sistemas. Prentice-Hall Hispanoamérica, S. A., 1994.

9. Proakis J. y Manolakis D. Tratamiento digital de señales. Prentice Hall. Tercera edición, 1998.

10. Zamora Ma. I. y Macho V. Distorsión armónica producida por convertidores estáticos. 1a. Edición, Iberdrola S.A. Marzo, 1997.