

EL HOMBRE Y LA MÁQUINA

El hombre y la máquina
Universidad Autónoma de Occidente
maquina@uao.edu.co
ISSN (Versión impresa): 0121-0777
COLOMBIA

2005

Eduardo Marlés Sáenz / Enrique Ciro Quispe Oqueña
EL MÉTODO DEL VECTOR ESPACIAL. UNA INTRODUCCIÓN A LOS
FUNDAMENTOS FÍSICO-MATEMÁTICOS Y A SU APLICACIÓN AL ESTUDIO DE
MÁQUINAS ELÉCTRICAS

El hombre y la máquina, julio-diciembre, número 025
Universidad Autónoma de Occidente
Cali, Colombia
pp. 56-69

Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal

Universidad Autónoma del Estado de México

<http://redalyc.uaemex.mx>



El método del vector espacial

Una introducción a los fundamentos físico-matemáticos y a su aplicación al estudio de máquinas eléctricas

EDUARDO MARLÉS SÁENZ*
ENRIQUE CIRO QUISPE OQUEÑA**

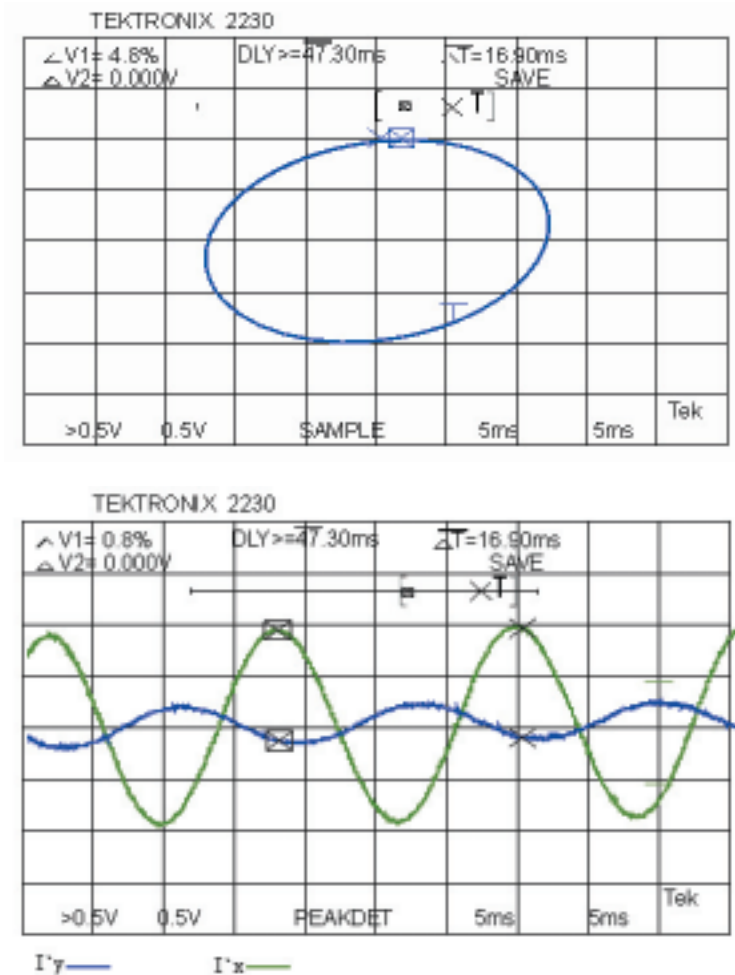


Fig 1. Oscilograma del vector espacial de corriente de un motor trifásico de inducción de 1/4hp, 220V alimentado con la red eléctrica a 60Hz (vista superior) y sus respectivas componentes de corriente, real $I'x$ e imaginaria $I'y$.

Resumen

Este artículo presenta una introducción teórico-experimental a los fundamentos físicos y matemáticos del método del vector espacial. Se deducen las ecuaciones teóricas de los vectores espaciales de voltaje y corriente para una máquina rotativa trifásica, y a partir de estas se definen las señales de entrada y salida adecuadas para la visualización del vector espacial mediante un osciloscopio. Así mismo se diseña el circuito eléctrico y electrónico que permite obtener en el osciloscopio los vectores espaciales de voltaje y corriente, el circuito fue probado exitosamente con dos motores de inducción trifásicos uno de 1/4hp y otro de 6.6 hp para diferentes fuentes de voltaje.

* Ing. Electricista., M.Sc. en Sistemas de Generación de Energía Eléctrica. Profesor Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Universidad del Valle. Investigador del Grupo de Investigación en Alta Tensión. GRALTA. E-mail: edmarles@univalle.edu.co

** Ing. Electricista, M.Sc. en Ingeniería Eléctrica. Aspirante a Doctor en Ingeniería. Director del Grupo de Investigación en Energías GIEN. Profesor Asociado del Departamento de Energética y Mecánica. Universidad Autónoma de Occidente. E-mail: ecquispe@uao.edu.co

Fecha de recepción: 05/27/05, Fecha de aprobación: 07/25/05

Palabras clave: Vector espacial, voltaje y corriente, fuerza magnetizante, campo magnético giratorio, circuito eléctrico y electrónico.

Abstract

This article present a theoretical - experimental introduction to the physical and mathematical foundations of the space-vector method. The theoretical equations of the space-vector of voltage and current for a three-phase rotating machine are deduced, and then define the adequate input and output signals for the visualization of the space-vector using an oscilloscope. Likewise, the electric and electronic circuit that allows the visualization of the voltage and current space-vector in the oscilloscope was designed; this circuit was tested successfully with two three-phase induction motors, one of 1/4hp and the other one of 6.6 hp with different voltage sources.

Key words: Space-vector, voltage and current, magnetizing force, rotating magnetic field, electric and electronic circuit.

mica de los motores eléctricos. La aplicación de este método al control de motores de inducción, Blaschke,² dio origen al método de control de campo orientado o método de control vectorial, que actualmente es el método estándar para el control de motores de inducción.

En este trabajo se presentan los fundamentos físico-matemáticos del método, deduciéndose en forma completa las ecuaciones matemáticas correspondientes a los vectores espaciales de tensión, corriente y de fuerza magnetomotriz para el bobinado trifásico de una máquina de corriente alterna. Así mismo se presenta la implementación del diseño de un circuito eléctrico-electrónico que permite observar en un osciloscopio la evolución del vector espacial de tensión y corriente en el tiempo y su lugar geométrico. Los circuitos diseñados, Figuras 9 y 10, permiten obtener las componentes real e imaginaria de los vectores espaciales de corriente (fuerza magnetizante) y voltaje (flujo) de una máquina trifásica rotativa. Los circuitos implementados fueron utilizados para el análisis experimental de dos motores de inducción trifásicos de 1/4 hp y 6.6 hp, obteniéndose en un osciloscopio los vectores espaciales de voltaje y corriente. Los resultados presentados corresponden a un trabajo de investigación que se inició como una tesis de grado³ y luego se continuó como un proyecto conjunto de cooperación entre dos grupos de investigación.

I. Introducción

La comprensión del comportamiento dinámico del motor eléctrico es indispensable para el diseño de sistemas de control que satisfagan las exigencias requeridas por el mecanismo de producción. El método del vector espacial, propuesto por Rácz y Kovacs en 1954,¹ es sin duda el método más completo para expresar matemáticamente la diná-

II. Fundamentos físico-matemáticos

En la teoría de circuitos eléctricos de corriente alterna se usan los fasores, para representar ondas de voltaje y corriente que varían sinusoidalmente en el tiempo debido a que simplifican extraordinariamente el análisis y el cálculo en circuitos eléctricos.

En el estudio de las máquinas eléctricas se presentan varias cantidades físicas que pueden ser consideradas como funciones periódicas, distribuidas en el espacio alrededor de la periferia del estator y en el entrehierro de la máquina. Ejemplos de ello son la densidad de flujo magnético, la fuerza magnetomotriz del rotor y del estator. Estas funciones pueden ser tratadas como funciones que varían sinusoidalmente en el espacio. Por lo tanto el fasor de la teoría de circuitos no puede ser usado para representar estas cantidades. Sin embargo, haciendo una analogía con el fasor se define el **fasor espacial**¹ para representar cantidades físicas de distribución sinusoidal en el espacio y su notación es numéricamente igual a una cantidad compleja. Si la magnitud en cuestión tiene una distribución espacial no sinusoidal, se procede a su desarrollo en serie de Fourier y se le asigna a cada onda armónica su correspondiente fasor espacial.

El **fasor espacial** también es llamado vector espacial, «vector Park-Gorev», «vector resultante» y «vector trifásico».

La posición espacial de todos los máximos, de una cantidad física determinada, está dada por un solo vector espacial. La variación espacial de dicha cantidad física, para una coordenada espacial x , es la proyección del vector espacial sobre el respectivo vector unitario complejo.

El análisis con el método del vector espacial puede ser usado con máquinas de polo liso o máquinas de polo saliente.

A. Notación matemática del vector espacial

El vector espacial representa una onda móvil, en el devanado de la máquina trifásica, de la forma

$$\hat{A} = A_{max} \cdot sen(t' - a) \tag{1}$$

donde

$$t' = \omega.t = (2\pi / T).t$$

T = período de tiempo de la onda.

$$a = (2\pi / T_{esp}).x$$

T_{esp} = período espacial de la onda y corresponde a dos pasos polares 2τ .

Para una onda móvil obtenida de la superposición de tres ondas pulsantes ($m = 3$), desfasadas en el espacio y en el tiempo un ángulo de la ecuación será de la forma:^{3,4}

$$\frac{m}{2} \hat{A} = \frac{m}{2} \cdot A_{max} sen(t' - a) \tag{2}$$

\hat{A} = fasor espacial resultante de m ondas pulsantes.

m = número de fases ($m = 3$, máquinas trifásicas).

V_{max} = valor máximo de cada onda pulsante.

De acuerdo con la Figura 2, para una máquina con sus devanados de fase igualmente diseñados y simétricamente distribuidos a $2\pi/3$ grados espaciales y circulando por ellos

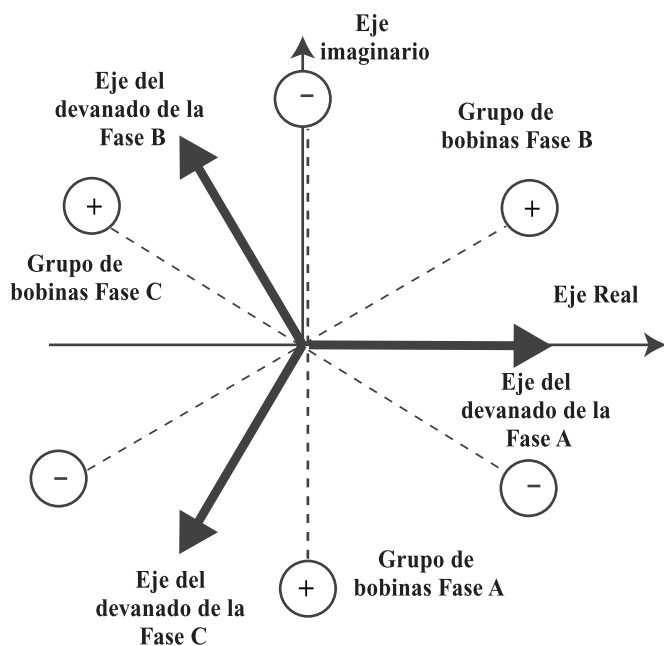


Figura 2. Sistema natural de coordenadas espaciales para la ubicación de los vectores espaciales.

las ondas pulsantes de cada fase de un sistema trifásico balanceado (V_1, V_2, V_3) se obtiene la onda móvil de la ecuación 2.

Para un sistema trifásico balanceado de secuencia directa (ABC) las ondas pulsantes por fase son

De voltajes

$$U_a = U_{max} \cdot \cos(\omega t) \quad (3)$$

$$U_b = U_{max} \cdot \cos(\omega t - 2\pi/3) \quad (4)$$

$$U_c = U_{max} \cdot \cos(\omega t + 2\pi/3) \quad (5)$$

De corrientes

$$I_a = I_{max} \cdot \cos(\omega t + \theta_z) \quad (6)$$

$$I_b = I_{max} \cdot \cos(\omega t + \theta_z - 2\pi/3) \quad (7)$$

$$I_c = I_{max} \cdot \cos(\omega t + \theta_z + 2\pi/3) \quad (8)$$

θ_z = ángulo relativo entre el voltaje y corriente de cada fase.

Se usa el vector unitario \hat{a} para expresar el desplazamiento en el plano complejo (equivalente al desplazamiento espacial de los ejes de los grupos de bobina de la Figura 2) de acuerdo con la ecuación:

$$\hat{a} = e^{j\theta} = \cos \theta + j \sen \theta \quad (9)$$

Para el caso particular de un sistema trifásico se usa $\theta = 2\pi/3$ y se expresa

$$\hat{a} = e^{j2\pi/3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (10)$$

$$\hat{a}^2 = e^{-j2\pi/3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (11)$$

Por lo tanto la ubicación de los ejes de cada fase pulsante de un sistema trifásico de voltajes, secuencia ABC, es

$$fase A = e^{-j0} U_a = \hat{U}_a \quad (12)$$

$$fase B = e^{j\frac{2\pi}{3}} U_b = \hat{a} U_b = \hat{U}_b \quad (13)$$

$$fase C = e^{-j\frac{2\pi}{3}} U_c = \hat{a}^2 U_c = \hat{U}_c \quad (14)$$

Por estar desfasados en el espacio y el tiempo un mismo ángulo y de acuerdo con la ecuación (2), el vector espacial de la onda de voltaje correspondiente es

$$\hat{U} = \frac{2}{3} (U_a + \hat{a} U_b + \hat{a}^2 U_c) \quad (15)$$

y su correspondiente onda de flujo magnético

$$\hat{\phi} = \frac{2}{3} (\phi_a + \hat{a} \phi_b + \hat{a}^2 \phi_c) \quad (16)$$

Por definición de un sistema trifásico completo, se usa una tercera componente de secuencia cero

$$U_0 = \frac{1}{3} (U_a + U_b + U_c) \quad (17)$$

$$\phi_0 = \frac{1}{3} (\phi_a + \phi_b + \phi_c) \quad (18)$$

Análogamente el vector espacial de la onda de corriente del estator se representa como

$$\hat{I} = \frac{2}{3} (i_a + \hat{a} i_b + \hat{a}^2 i_c) \quad (19)$$

$$i_o = \frac{1}{3} (i_a + i_b + i_c) \quad (20)$$

y su correspondiente onda de fuerza magnetizante es

$$\hat{F}_m = \frac{2}{3} (F_a + \hat{a} F_b + \hat{a}^2 F_c) \quad (21)$$

Donde

$$F_a = \frac{2}{\pi} q \cdot K_{dev} \cdot N \cdot I_{max} \cdot \cos(\omega t + \theta) \quad (22)$$

F_a^* = fuerza magnetizante (onda pulsante) total de la fase A para el armónico fundamental.

q = número de ranuras por polo y fase.

K_{dev} = factor de devanado.

N = número de espiras por bobina.

*. Junto con las fuerzas magnetizantes de las otras fases F_b y F_c constituyen un sistema trifásico simétrico, y sus magnitudes son inversamente proporcionales al armónico que representan.

B. Componentes del vector espacial

Se puede hacer una correspondencia directa entre la posición en el plano complejo y la posición del vector espacial a lo largo de la periferia del inducido de la máquina para cada par de polos. De acuerdo con la Figura 2 los tres ejes resultantes de cada fase están dispuestos en los 360° espaciales del inducido.

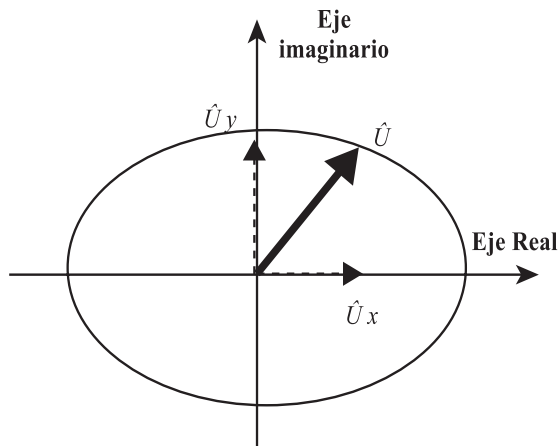


Figura 3. Lugar geométrico del vector espacial de voltaje con sus componentes real e imaginaria.

$$\hat{U} = \Re[\hat{U}] + j \text{Im}[\hat{U}] = U_x + j U_y \quad (23)$$

C. Lugar geométrico del vector espacial para un sistema trifásico equilibrado

Para un sistema trifásico simétrico de secuencia ABC el vector espacial de corriente \hat{I}_1 viene dado por:

$$\hat{I}_1 = \frac{2}{3}(i_a + a i_b + a^2 i_c) \quad (24)$$

reemplazando en (24) las ecuaciones (6), (7) y (8) se tiene

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{3} I_1 \left\{ (e^{j\theta} + e^{-j\theta}) + e^{j\frac{2\pi}{3}} * \left(e^{j(\theta - \frac{2\pi}{3})} + e^{-j(\theta - \frac{2\pi}{3})} \right) + e^{-j\frac{2\pi}{3}} * \left(e^{j(\theta + \frac{2\pi}{3})} + e^{-j(\theta + \frac{2\pi}{3})} \right) \right\} \quad (25)$$

Donde

$$\theta = (\omega t + \phi_1)$$

Al resolver se obtiene

$$\hat{I}_1 = I_1 e^{j\theta} = I_1 e^{j(\omega t + \phi_1)} \quad (26)$$

Por lo tanto el vector espacial de corriente de secuencia ABC de estado estable es

$$\hat{I}_1 = I_1 e^{j\phi_1} \cdot e^{j\omega t} \quad (27)$$

Donde

I_1, I_2 = Amplitudes de los vectores espaciales de corriente de secuencia directa e inversa respectivamente.

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ = frecuencia angular del sistema.

ϕ_1, ϕ_2 = Ángulos de fase inicial

El lugar geométrico correspondiente a la ecuación (27) es una circunferencia de radio I_1 como se muestra en la Figura 4, con el vector espacial girando en sentido directo.

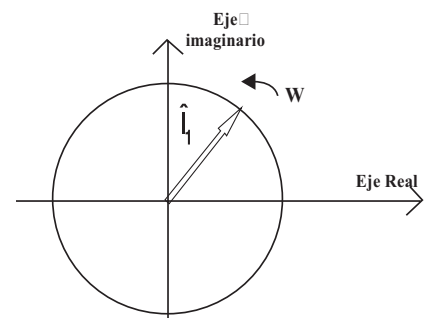


Figura 4. Vector espacial de corriente de un sistema trifásico balanceado secuencia de fase positiva. Representación gráfica de la ecuación (27).

Análogamente para un sistema balanceado de secuencia ACB se obtiene la ecuación (28) con lo que el vector espacial gira en sentido contrario al indicado en la Figura 4.

$$\hat{I}_2 = I_2 e^{-j\theta_2} * e^{-j\omega t} \tag{28}$$

D. Lugar geométrico del vector espacial para un sistema trifásico desequilibrado

En el caso asimétrico la suma total de corrientes es $i_a + i_b + i_c \neq 0$. Por lo que aparecen corrientes de secuencia positiva, negativa y secuencia cero. Lo anterior da lugar a dos vectores espaciales y una componente de secuencia cero. El vector espacial resultante será la suma de los vectores de secuencia positiva y negativa. Esto es

$$\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 = I_1 e^{j(\omega t + \phi_1)} + I_2 e^{-j(\omega t + \phi_2)} \tag{29}$$

$$\hat{I} = \left\{ \begin{aligned} & [I_1 \cos\phi_1 + I_2 \cos\phi_2] \cos \omega t \\ & - [I_1 \sin\phi_1 + I_2 \sin\phi_2] \sin \omega t \end{aligned} \right\} + j \left\{ \begin{aligned} & [I_1 \sin\phi_1 - I_2 \sin\phi_2] \cos \omega t \\ & + [I_1 \cos\phi_1 - I_2 \cos\phi_2] \sin \omega t \end{aligned} \right\} \tag{30}$$

En sus componentes real e imaginaria

$$\hat{I} = \hat{I}_x + j \hat{I}_y \tag{31}$$

Para visualizar más rápidamente el lugar geométrico del vector espacial expresado mediante la ecuación (30), y para este caso asimétrico, hacemos que los factores de fase ϕ_1 y ϕ_2 coincidan, al elegir en $t=0$, a $\phi_1 = \phi_2 = 0$, es decir, I_1 e I_2 se superponen inicialmente en $t = 0$ y continúan viajando en sentidos opuestos y con una velocidad angular w .

En las condiciones anteriores la ecuación para el vector espacial queda expresada como sigue

$$\hat{I} = \{ (I_1 + I_2) \cos \omega t + j(I_1 - I_2) \sin \omega t \} \tag{32}$$

como $\hat{I} = \hat{I}_x + j \hat{I}_y$
es decir

$$\begin{aligned} \hat{I}_x &= (I_1 + I_2) \cos \omega t \\ \hat{I}_y &= (I_1 - I_2) \sin \omega t \end{aligned} \tag{33}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado en cada ecuación y sumándolas se obtiene

$$\left[\frac{\hat{I}_x}{(I_1 + I_2)} \right]^2 + \left[\frac{\hat{I}_y}{(I_1 - I_2)} \right]^2 = 1 \tag{34}$$

Luego el lugar geométrico en el plano complejo del vector espacial, correspondiente a esta expresión, es una elipse. Teniendo en cuenta las condiciones iniciales en $t = 0$ que $\phi_1 = \phi_2 = 0$, se deduce que el eje mayor de esta elipse es igual a la cantidad $I_1 + I_2$ y está ubicado en el eje real. Y que el eje menor de esta elipse es igual a la cantidad $I_1 - I_2$ y está ubicado en el eje imaginario.

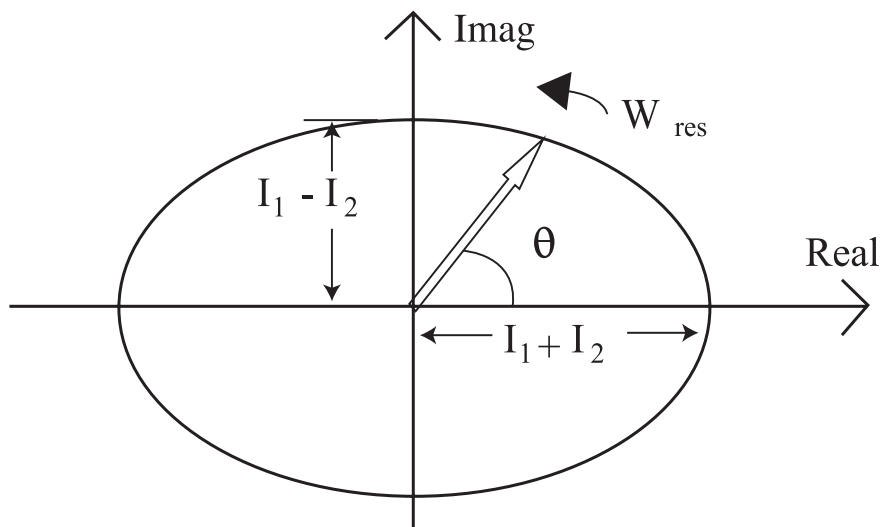


Figura 5. Vector espacial de corriente de un sistema trifásico desbalanceado. Representación gráfica de la ecuación (34).

Según la Figura 5

$$\tan \theta_{res} = \frac{i_y}{i_x} = \frac{(I_1 - I_2) \sin \omega t}{(I_1 + I_2) \cos \omega t} \tag{35}$$

La velocidad angular resultante W_{res} se obtiene derivando respecto al tiempo a ϕ_{res} de la ecuación (35)

$$W_{res} = \frac{2(I_1 - I_2) \cdot w}{(I_1 + I_2) \left[1 + \left[\frac{(I_1 - I_2)}{(I_1 + I_2)} \right]^2 - \left(-1 + \left[\frac{(I_1 - I_2)}{(I_1 + I_2)} \right]^2 \right) \cos(2\omega t) \right]} \text{ [rad/s]} \tag{36}$$

En la ecuación (36) se ve claramente que la velocidad angular resultante es variable respecto al tiempo y a la frecuencia y su sentido de giro es el siguiente:

- Sentido directo (sentido de secuencia positiva) si $I_1 > I_2$.
- Sentido inverso si $I_1 < I_2$.
- Es nulo en el caso de un devanado monofásico donde $I_1 = I_2$.

Mediante un análisis matemático más detallado³ de la ecuación (30) se encontraron las siguientes relaciones importantes

- 1) En el arranque, el motor eléctrico de inducción alcanza los picos máximos de corriente en:

$$t = \frac{(k\pi - \phi_1 - \phi_2)}{2\omega}, \text{ con } k = 0, 2, 4, 6... \text{ par} \tag{37}$$

Para frecuencia constante los momentos en donde se alcanzan los máximos dependen directamente de la fase en la que se hallaba, para $t = 0$, cada uno de los sistemas simétricos de secuencia positiva y negativa.

Una aplicación de lo encontrado, es que se podrían controlar directamente los puntos en los cuales ocurrirán los máximos del vector espacial de corriente³ con sólo variar los factores de fase ϕ_1 y ϕ_2 de tal manera que de entrada se logre saber, por ejemplo, que el primer máximo de la onda del vector espacial de corriente ocurrirá para $k = 0$ en $\omega t = -(\phi_1 + \phi_2)/2$ radianes eléctricos.

- 2) Los períodos y la frecuencia en los cuales ocurren los picos máximos de corriente, son inversamente proporcionales. Es decir que para tiempos muy pequeños de un estado transitorio en la ecuación (37) se observa que como los factores de fase

son constantes, las frecuencias deben ser altas para equilibrar físicamente el fenómeno inercial eléctrico de acuerdo con la ecuación

$$2\pi f t = -(\phi_1 + \phi_2) \tag{38}$$

Lo anterior ocurre hasta que la máquina rotativa logre el estado estable.

E. Lugar geométrico del vector espacial en el caso en donde se abre la línea de alimentación por donde circula i_b

Si la corriente de fase i_b se hace cero se tiene que $i_a + i_c = 0$ de donde, $i_c = -i_a$

Es decir que en estos casos las corrientes de las líneas restantes se equilibran de tal manera que su suma es igual a cero.

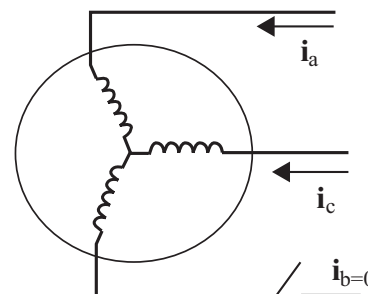


Figura 6. Eliminación de la corriente de línea de la fase b que alimenta a un motor trifásico.

Para hallar el lugar geométrico correspondiente a este caso partiendo de la ecuación (19), se hace en esta ecuación $i_b = 0$, y se sustituye $i_c = -i_a$ con lo que se obtiene

$$\hat{I} = \left(1 + j \frac{1}{\sqrt{3}} \right) i_a \tag{39}$$

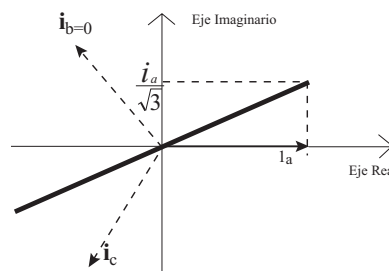


Figura 7. Lugar geométrico del vector espacial de corriente con sus componentes real e imaginaria.

F. Cantidades de los valores instantáneos de los voltajes de fase

Los voltajes de fase se hallan como la proyección del vector espacial sobre los ejes del sistema de referencia trifásico mediante las expresiones siguientes

$$U_a = \Re e [\hat{U}] + U_0 \tag{40}$$

$$U_b = \Re e [\hat{a}^2 \hat{U}] + U_0 \tag{41}$$

$$U_c = \Re e [\hat{a} \hat{U}] + U_0 \tag{42}$$

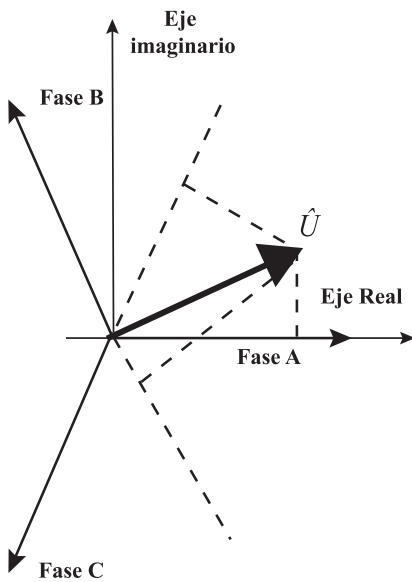


Figura 8. Proyecciones del vector espacial sobre los ejes de cada fase.

Para un sistema simétrico en los devanados de la máquina rotativa, la componente de secuencia cero no está presente y las proyecciones son como se muestra en la Figura 8.

G. Obtención de las componentes del vector espacial

El vector espacial puede ser obtenido a partir de las ecuaciones (40) a la (42) en componentes de fase o de línea de acuerdo con el capítulo 4.³ Las relaciones son las siguientes:

En función de las tensiones de fase

$$U_x = \frac{2}{3} U_a - \frac{1}{3} (U_b + U_c) \tag{43}$$

$$U_y = \frac{1}{\sqrt{3}} (U_b - U_c) \tag{44}$$

En función de los voltajes de línea

$$U_x = \frac{2}{3} U_A + \frac{1}{3} U_B \tag{45}$$

$$U_y = \frac{1}{\sqrt{3}} U_B \tag{46}$$

Análogamente para las componentes de corriente:

En función de las corrientes de fase

$$i_x = \frac{2}{3} i_a - \frac{1}{3} (i_b + i_c) \tag{47}$$

$$i_y = \frac{1}{\sqrt{3}} (i_b - i_c) \tag{48}$$

En función de las corrientes de línea

$$i_x = \frac{2}{3} i_A + \frac{1}{3} i_B \tag{49}$$

$$i_y = \frac{1}{\sqrt{3}} i_B \tag{50}$$

H. Relaciones entre las cantidades de línea y de fase usando las componentes del vector espacial

Para secuencia ABC las componentes espacio-temporales del vector espacial (cantidades de voltajes de línea en notación compleja) son

$$\hat{U}_{LA} = U_a - U_b \tag{51}$$

$$\hat{U}_{LB} = U_b - U_c \tag{52}$$

$$\hat{U}_{LC} = U_c - U_a \tag{53}$$

Los valores de las tensiones de línea serán

$$U_A = \Re e[\hat{U}_{LA}] \quad (54)$$

$$U_B = \Re e[\hat{U}_{LB}] \quad (55)$$

$$U_C = \Re e[\hat{U}_{LC}] \quad (56)$$

Las componentes espacio temporales del vector espacial (cantidades de corrientes de línea en notación compleja) son

$$\hat{i}_{LA} = i_a - i_b \quad (57)$$

$$\hat{i}_{LB} = i_b - i_c \quad (58)$$

$$\hat{i}_{LC} = i_c - i_a \quad (59)$$

Los valores de las corrientes de línea serán

$$i_A = \Re e[\hat{i}_{LA}] \quad (60)$$

$$i_B = \Re e[\hat{i}_{LB}] \quad (61)$$

$$i_C = \Re e[\hat{i}_{LC}] \quad (62)$$

I. Potencia instantánea

Conocidos los vectores espaciales de voltaje y corriente de un sistema, se puede conocer la potencia instantánea presente, lo cual se cumple en el caso de sistemas simétricos o asimétricos. Se puede calcular la potencia instantánea, mediante la expresión:

$$P = \frac{3}{2}UI + 3U_o i_o \quad (63)$$

Con

$$UI = \Re e[\hat{U} \cdot \hat{I}^*] = \Re e[\hat{U}^* \cdot \hat{I}] \quad (64)$$

Donde

\hat{U}, \hat{I} = los vectores espaciales de voltaje y corriente respectivamente

\hat{U}^*, \hat{I}^* = los complejos conjugados de los vectores espaciales de voltaje y corriente respectivamente.

Resolviendo la ecuación (64) se tiene

$$\Re e[\hat{U}\hat{I}^*] = \frac{2}{3}(U_a i_a + U_b i_b + U_c i_c) - 2i_o U_o \quad (65)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (63) se llega a que la potencia instantánea es

$$P = U_a i_a + U_b i_b + U_c i_c \quad (66)$$

III. Análisis experimental

A. Presentación y grabado de los vectores espaciales de voltaje y corriente.

El lugar geométrico del vector espacial de voltaje puede ser visualizado, mediante la gráfica o grabado en la pantalla de un osciloscopio. Para ello se debe disponer de sus componentes real e imaginaria de acuerdo con la ecuación (23) y las ecuaciones (45) y (46). El propósito se logra midiendo las cantidades de línea U_A y U_B .

En la Figura 9 se muestra el circuito de medición diseñado e implementado para obtener las componentes del vector espacial de voltaje en forma de señales analógicas en las proporciones indicadas en la figura, cuyas amplitudes pueden ser ajustadas a los niveles necesarios. Lo anterior es importante en la implementación de circuitos o sistemas de control directo del campo de la máquina.⁵

Igualmente, como el vector espacial de corriente puede ser expresado en sus componentes real e imaginaria de acuerdo con la ecuación (31), basta con determinar las componentes corriente \hat{i}_x, \hat{i}_y de acuerdo con las ecuaciones (49) y (50) que se obtienen midiendo las cantidades de línea i_A y i_B .

En la Figura 10 se muestra el circuito de medición diseñado e implementado y con el cual se obtuvo tanto las ondas de las componentes \hat{i}_x e \hat{i}_y así como el vector espacial de corriente del estator de un motor de inducción de 1/4 hp con carga y cuyos resultados se muestran en la Figura 10.

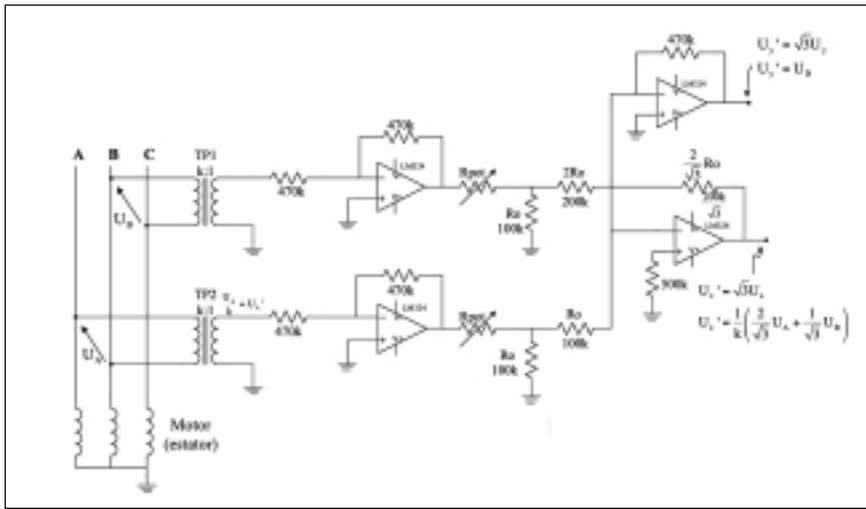


Figura 9. Esquema de la implementación del circuito de medición de las componentes del vector espacial de voltaje.

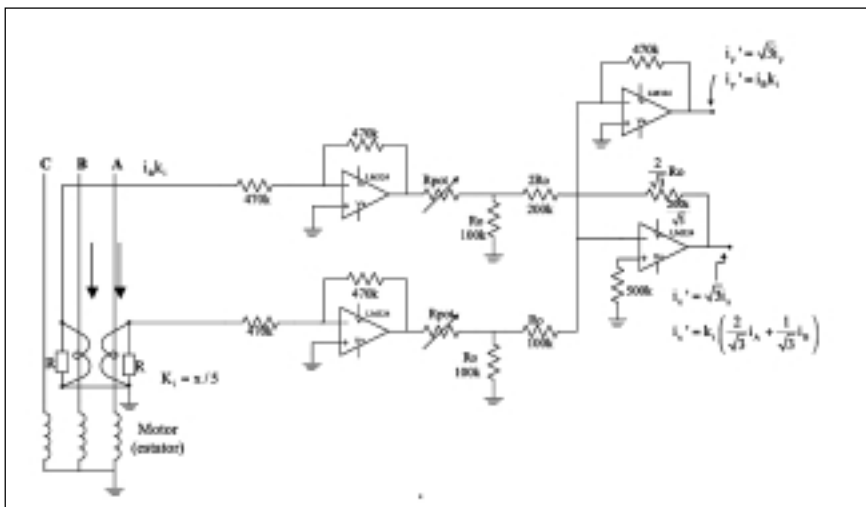


Figura 10. Esquema de la implementación del circuito de medición de las componentes del vector espacial de corriente.

La implementación del circuito se realizó en cuatro etapas necesarias, a saber:

- 1 = Etapa de potencia, donde es necesario el uso de transformadores de instrumentación.
- 2 = Etapa de aislamiento, para atenuar los efectos de los transitorios en el arranque que podrían dañar los circuitos integrados.
- 3 = Etapa de ajuste de amplitud de las señales de entrada, con lo que se establecen los factores numéricos de atenuación de cada etapa.
- 4 = Etapa de cálculo de las componentes del vector espacial. Esta etapa entrega finalmente las cantidades o componentes real e imaginaria para ser llevadas a las placas vertical y horizontal del osciloscopio a través de los canales de entrada que pueden ser A y B.

Para observar el lugar geométrico del vector espacial se debe seleccionar la función de trazado x-y o comparación de canales del osciloscopio.

B. Ejemplos de oscilogramas de los vectores espaciales de voltaje y corriente.

Con los circuitos diseñados e implementados se obtuvieron los oscilogramas usando los canales A y B de un osciloscopio Tektronix 2230.

1. Oscilogramas del vector espacial de corriente

La Figura 11 muestra el oscilograma del vector espacial de corriente para un motor trifásico de inducción de 1/4hp, 220V operando en vacío. El desbalance en las corrientes del estator no es muy

apreciable debido a los valores bajos de corriente. Contrariamente en la Figura 10 y para la misma máquina, operando con carga nominal, el vector espacial de corriente indica un ligero desbalance en las corrientes trifásicas cuando es alimentado con una fuente trifásica de voltajes balanceados en las condiciones indicadas. La situación presentada en la Figura 10 es un caso similar al estimado teóricamente y presentado en la Figura 5, donde la velocidad angular del rotor no es constante.

En la Figura 12 se presentan las ondas componentes del vector espacial en el caso de la máquina funcionando en estado estable y a la cual se le ha quitado la alimentación por la línea de la fase B. Es importante destacar cómo las componentes real e imaginaria quedan en fase. El lugar geométrico correspondiente es el mostrado en la Figura 12, vista superior. En este caso la onda deja de ser móvil en el entrehierro de la máquina para volverse pulsante y su amplitud varía a lo largo de la recta o lugar geométrico que se muestra. La situación presentada en la Figura 13 es el caso similar al estimado teóricamente y presentado en la Figura 7, donde la velocidad angular del rotor es cero.

La Figura 13 muestra el transitorio del vector espacial de corriente del motor, para llegar finalmente al estado estable de la Figura 1. Se aprecia cómo la magnitud del vector espacial de corriente decae en el tiempo y en el espacio haciendo una trayectoria en espiral hacia el centro hasta alcanzar la magnitud del vector espacial de corriente en estado estable (lugar geométrico más interno de la Figura 13).

2. Oscilogramas del vector espacial de voltaje

La Figura 14 presenta los oscilogramas de las componentes real e imaginaria del vector espacial de

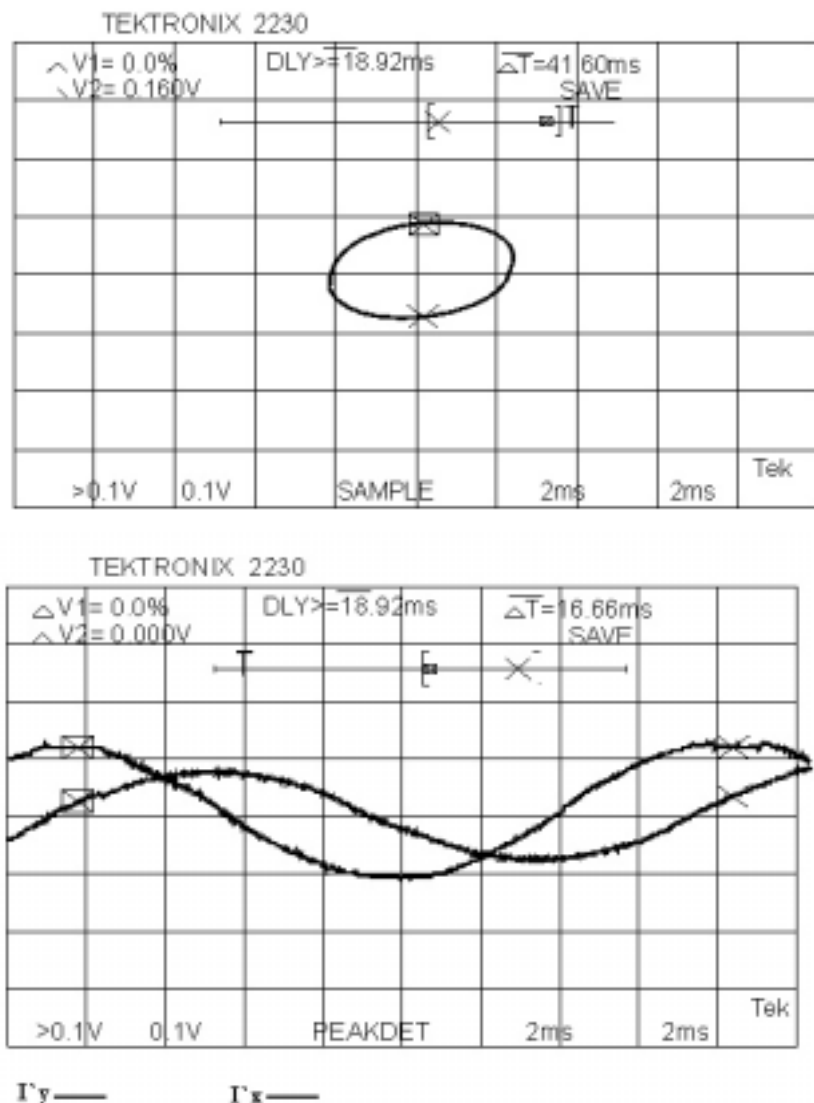


Figura 11. Vector espacial de corriente (oscilograma superior). Componentes del vector de corriente (oscilograma inferior).

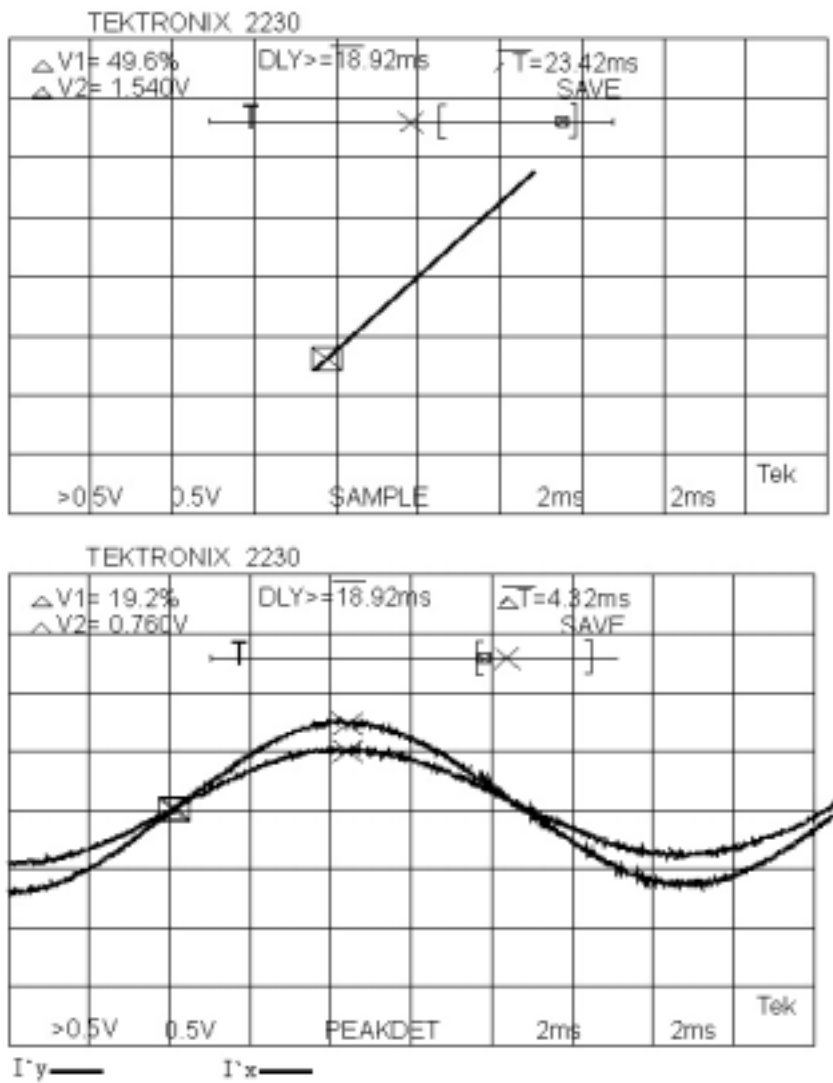


Figura 12. Vector espacial de corriente (oscilograma superior). Componentes del vector de corriente (oscilograma inferior).

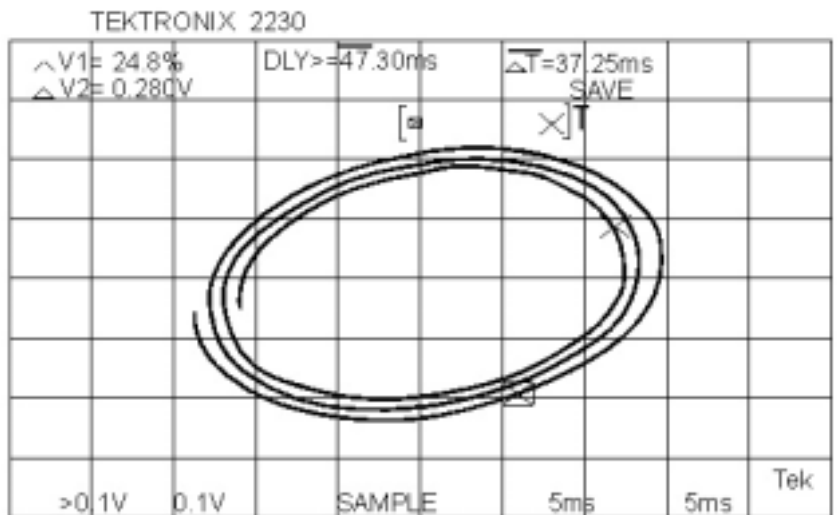


Figura 13. Comportamiento transitorio del vector espacial de corriente en el momento del arranque del motor trifásico de inducción de 1/4 hp.

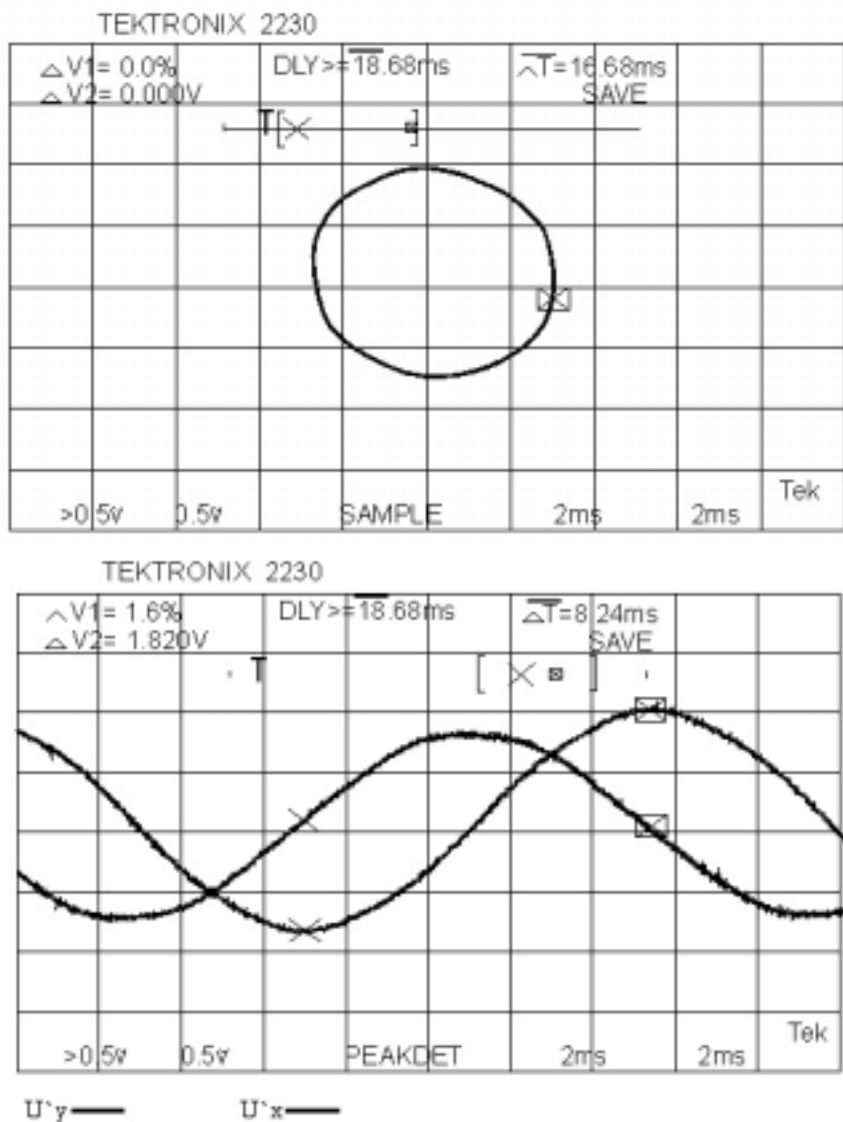


Figura 14. Vector espacial de voltaje (oscilograma superior). Componentes del vector de voltaje (oscilograma inferior).

voltaje de un motor trifásico de inducción de 6.6 Hp, 220V, 60 Hz, en momentos en los que el arrancador electrónico le ha conectado directamente la red sinusoidal como fuente de alimentación. El motor se encontraba en vacío.

El lugar geométrico correspondiente mostrado por el oscilograma superior de la Figura 14, indica el balance del sistema trifásico de voltajes de alimentación al estator de la máquina. El lugar geométrico del vector espacial es de la forma indicada por la Figura 4, sólo que en este caso se trata de un vector espacial de voltaje de un sistema trifásico balanceado en secuencia directa.

IV. Conclusiones

- El análisis de los modelos matemáticos del vector espacial permitió determinar las variables fundamentales que definen su sentido de giro y la naturaleza variable de la velocidad angular del campo magnético (ecuación 36).
- Se encontró que la forma del lugar geométrico del vector espacial de corriente y voltaje depende tanto de la distribución espacial de los devanados como de las formas de las ondas de voltaje y corriente de cada fase.
- El lugar geométrico del vector espacial permite conocer si la máquina trifásica opera en forma balanceada o desbalanceada, siendo el efecto más notorio al aumentar la carga del motor.
- Mediante el análisis del modelo matemático del vector espacial de corriente, de un sistema trifásico desbalanceado de corrientes, se encontró que los puntos en el tiempo para los cuales se alcanzan los valores máximos del vector espacial de corriente dependen en proporción directa de la suma algebraica de los factores de fase iniciales de los sistemas de secuencia positiva y negativa (ecuación 37).
- En el diseño del circuito (Figuras 9 y 10) la identificación de las componentes real e imaginaria del vector espacial en función de variables físicas medibles de voltajes y corrientes de alimentación de la máquina, resultó ser la estrategia en la construcción del circuito de medición, con lo que se pudo establecer los parámetros para el diseño y la adecuada elección del circuito.
- Se logró hacer la implementación del circuito de medida, a

partir de recomendaciones anteriores sobre prototipos de diseño.^{9,13}. Obteniéndose un nuevo diseño que describe fielmente los comportamientos de la máquina, como se espera según la teoría.

- Los circuitos implementados fueron utilizados para el análisis experimental de dos motores de inducción trifásicos de 1/4 hp y 6.6 hp, y así observar que el lugar geométrico de los vectores espaciales depende del tipo de tensión de alimentación y del estado del motor, comprobándose la validez de las ecuaciones teóricas

V. Referencias

1. Rácz, I. and Kovács, K. P. *Transiente Vorgänge in Wechselstrommaschinen*. Akademia Kiadó. Budapest. 1954.
2. Blaschke, F. The principle of field-orientation as applied to the new Transvektor closed-loop control system for rotating-fiel machines. *Siemens Review*, No. 34, 1972, pp 217-220.
3. Marlés S., Eduardo. *Fundamentos Físico Matemáticos del vector espacial*. Tesis de Grado. Director E. Quispe. Universidad del Valle. 1997.
4. Kostenko, M.P. y Piotroski, I. M. *Máquinas Eléctricas*. Moscú, Mir. 1976. Tomo II.
5. Uffe Borup, Prasad N. Enjeti, and Frede Blaabjerg. A New space-vector -Based Control Method for UPS Systems Powering Nonlinear and Unbalanced Loads. *IEEE Transactions On Industry Applications*, Vol. 37, No. 6. 2001. pp 1864-1870.
6. VAS, Peter. *Electrical Machines and Drives. A space-vector Theory Approach*. Clarendon Press. Oxford. 1992.
7. R. Muñoz, Alfredo and Lipo, Thomas A. Complex vector Model of the Squirrel-Cage Induction Machine Including Instantaneous Rotor Bar Currents. *IEEE Transactions On Industry Applications*, Vol. 35, No. 6. 1999. pp 1332-1340.
8. Lázár, J. *Park - vector Theory of Line - Commutated Three-Phase Bridge Converters*. Converter Controlled Electrical Drives Series editor: S. Halász. Volume I. Budapest. Hungría. 1987.
9. Naunin, Dietrich. *Teaching Aspects for The Representation of Modern Control of Induction Motor Drives*.
10. Naunin, Dietrich. *The Calculation of Dynamic Behavior of Electrical Machines By space-Fasors*. *Electrical Machine and Electromechanics*. Vol. 4. 1974. pp. 33-45.
11. Patiño, Jorge E. *Control de Campo Orientado*. Memorias Primer Encuentro Nacional de Automática, Cali. Noviembre de 1994.
12. Quispe, Enrique. *Modelos Matemáticos para el Análisis Transitorio de la Máquina Asíncrona*. Corporación Universitaria Autónoma de Occidente. Santiago de Cali. 1994.
13. RÁ CZ, I. Háromfázisú Vektork Oscillografálása és Harmonikus Analízise (Presentación y Análisis de Armónicos de los vectores espaciales). *Elektrotechnika*. 58. évf. 1965. pp. 80-97.
14. Serrano Iribarnegaray, L. *Fundamentos de Máquinas Eléctricas Rotativas*. Barcelona, Marcombo. 1989.
15. Serrano Iribarnegaray, L. and Morán, Eguíluz.: *Régimen Dinámico y Control de Motores Eléctricos*. Introducción a la Teoría de Fasores espaciales. *Mundo Electrónico*. May. 1991. pp. 111-115.
16. Quispe, Enrique. Navas, Jhon y Fernández, Leonardo. *Modelamiento y Análisis Transitorio del Motor de Inducción usando el método del vector espacial*. Memorias I Congreso de la asociación Colombiana de Automática. Noviembre 1994. Cali, Colombia. pp 291-298.
17. Aller, J.M.; Bueno, A.; Paga, T.; Restrepo, J.A. Guzman, V.M.; Gimenez, M.I. *space vector applications in power systems*. En: *Devices, Circuits and Systems, 2000*. Proceedings of the 2000 Third IEEE International Caracas Conference on 15-17, 2000. pp 781 - 786.